

5 класс (продолжительность — 3.5 часа)

5-1. Имеются 4 двери, на каждой На висит табличка. Оказалось, что три надписи верны, а одна неверна. За какой табличкой может выход? Укажите все варианты и докажите, что других нет.



Ответ. За третьей дверью.

Решение. Предположим, что на второй двери написана неправда, тогда выход не за третьей дверью. Отсюда следует, что на третьей двери также написана неправда — противоречие. Значит, на второй двери написана правда, то есть выход за третьей дверью.

Комментарий. Во время олимпиады был дан комментарий, что выход — один. Так что этим можно пользоваться при решении.

5-2. Бабушка испекла блины и сложила их в стопку. Между каждыми двумя блинами или мёд, или варенье, или сметана. Сверху и снизу блины ничем не намазаны.

Оказалось, что у каждого блина ровно одна сторона намазана мёдом. Ровно у трети блином ровно одна сторона намазана вареньем. У 10 блинов ровно одна сторона намазана сметаной. Сколько блинов в стопке?

Ответ. 18.

Решение. Пусть блинов x . Тогда всего сторон у блинов $2x$. Из этих сторон в мёде x штук, в варенье $x/3$ штук, в сметане 10 штук, пустые — 2 штуки. То есть

$$2x = x + \frac{x}{3} + 10 + 2,$$

откуда $x = 18$.

Критерии. Верный ответ без обоснования его единственности: 4 балла.

5-3. Вася хочет выложить в ряд 10 апельсинов, 11 бананов и 12 яблок. При этом он хочет, чтобы выполнялось свойство: рядом с каждым фруктом лежит ровно один фрукт другого вида. Сможет ли Вася так сделать?

Ответ. Нет.

Решение. Берем самый левый фрукт. Он какого-то цвета x . Следующий фрукт другого цвета y , и затем снова цвет y . Далее снова два фрукта одного цвета, далее снова два фрукта одного цвета и так далее. Последний фрукт должен быть отличен по цвету от последнего фрукта в найденных парах. Итого, все получается чётное количество фруктов (по два фрукта в паре, и ещё самый левый и самый правый), а у нас их нечётное количество.

Критерии. Обосновано, что внутри цепочки чередуются пары: 2 балла.

5-4. У Сильвера есть 900 монеток общей ценой 1000 пиастров (каждая монета достоинством в натуральное число пиастров). Докажите, что Сильвер сможет выбрать 100 монеток общей ценой ровно 200 пиастров.

Решение. Среди 900 монет не более ста имеют достоинство больше 1 тугрика — иначе общая цена монет была бы не меньше $799 + 101 \cdot 2 = 1001$ пиастра. Значит, есть хотя бы 800 монет достоинством в 1 пиастр. Отбросим их. Останутся 100 монет общим стоимостью 200 пиастров.

Критерии. Верный алгоритм без обоснования: 1 балл.

5-5. Саша хочет разложить числа от 1 до 24 на 7 кучек так, чтобы в каждой кучке было бы число, равное сумме остальных чисел в группе. Докажите, что он так не сможет сделать.

Решение. Если бы было можно так сделать, то нашлись бы 7 чисел, сумма которых равна сумме всех остальных чисел. Но даже сумма самых больших 7 чисел меньше суммы остальных.

Критерии. Замечено, что сумма в каждой кучке равна удвоенному наибольшему: 1 балл.

5-6. В каждой клетке таблицы 100×100 лежит яблоко или апельсин, причём известно, что их поровну. Коле разрешено за один ход или поменять яблоко с апельсином, но только если они находятся в соседних по сторонам клеточках, или же убрать два одинаковых фрукта, но только если они находятся в соседних по сторонам клеточках. Всегда ли Коля сможет такими операциями убрать все фрукты?

Ответ. Всегда.

Решение. Достаточно показать, что все апельсины можно переместить на верхнюю половину доски, а все яблоки — на нижнюю. Тогда понятно, что все фрукты можно будет убрать парами.

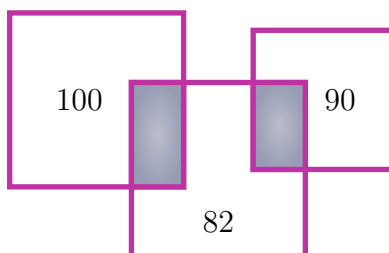
Для доказательства возможности такого перемещения отметим, что можно считать, что мы можем менять местами и соседние одинаковые фрукты — от этого ничего не меняется. То есть можно считать, что можно менять вообще любые соседние фрукты. Но такими операциями из любого расположения фруктов можно получить любое другое.

Критерии. Не обосновано, что фрукты можно перенести в предложенные места: снимается 1 балл.

Описан в целом верный алгоритм, но имеются проблемы с его обоснованием: снимается от 1 до 3 баллов в зависимости пробелов.

6 класс (продолжительность — 3.5 часа)

6-1. С дрона были сделаны три снимка местности, на всех снимках зафиксировано поровну деревьев. На рисунке указаны количества деревьев в белых областях. Чему равно суммарное количество деревьев в серых областях?



Ответ. 26.

Решение. Так как в первом и втором прямоугольниках поровну деревьев, то во второй серой области должно быть $100 - 82 = 18$ деревьев. Аналогично, во второй серой области находится $90 - 82 = 8$ деревьев. Общее количество деревьев в обеих серых областях равно $18 + 8 = 26$.

6-2. На трёх тарелках лежат орехи. Известно, что на какой-то тарелке в два раза больше орехов, чем на какой-то другой. Так же известно, что на какой-то тарелке в три раза больше орехов, чем на какой-то другой. Как распределены орехи по тарелкам, если всего имеется 140 орехов?

Ответ. 14, 42, 84.

Решение. Пусть количества орехов на двух тарелках равны x и $3x$. Тогда для выполнения условия, что на какой-то тарелке в два раза больше орехов, чем на другой, количество орехов на третьей тарелке может быть равно $2x$, $6x$, $\frac{3}{2}x$, $\frac{x}{2}$.

В каждом из четырех случаев получаем уравнения:

- 1) $x + 3x + 2x = 140$, $6x = 140$, x — нецелое.
- 2) $x + 3x + 6x = 140$, $10x = 140$, $x = 14$, откуда находим ответ.
- 3) $x + 3x + \frac{3}{2}x = 140$, $\frac{11}{2}x = 140$, x — нецелое.
- 4) $x + 3x + \frac{1}{2}x = 140$, $\frac{9}{2}x = 140$, x — нецелое.

Критерии. Не рассмотрен один из четырёх случаев: 5 баллов.

6-3. У Коли имеется несколько камней, каждый весит не обязательно целое количество грамм. Оказалось, что их можно разложить как на 10 кучек по 150 грамм каждая, так и на 15 кучек по 100 грамм каждая. Чему равно наименьшее возможное количество камней? Кучка может состоять в том числе и из одного камня.

Ответ. 20.

Решение. Оценка. Заметим, что все камни весят не более 100 грамм (так как они умещаются в кучки по 100 грамм), поэтому если их раскладывать на кучки по 150 грамм, то в каждой будет не менее двух камней. Всего получается не менее 20 камней.

Пример. Приведем пример, что 20 камней действительно могло быть. Пусть было 10 камней по 100 грамм, и 10 камней по 50 грамм. Очевидно, что эти камни раскладываются двумя требуемыми способами.

Критерии. Только пример: 3 балла.

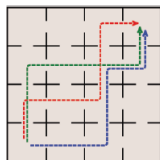
Замечено, что вес каждого камня не более 100: 1 балл за оценку.

6-4. На столе лежат 100 шаров, на которых написаны числа $1, 2, \dots, 100$. Играют двое. За ход нужно взять шар со стола и положить его в корзинку. Проигрывает тот игрок, после хода которого произведение всех чисел на шарах в корзинке станет делиться на 300. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника — первый или второй?

Ответ. Первый.

Решение. Первый своим первым ходом кладет в корзинку число 100. Далее ни один игрок не может класть в корзинку шар с числом, кратным 3 — он тогда сразу проиграет. Значит, далее игроки будут класть в корзинку шары с номерами, не кратными 3, при этом никто не проигрывает, так произведение числа 100 и сколько-то чисел, не кратных 3, не делится на 3. Но после первого хода первого игрока на столе осталось 66 чисел, не кратных 3, поэтому последнее из них заберет первый, тем самым следующим ходом второй проигрывает.

6-5. Музей состоит из 16 комнат, образующих квадрат 4×4 . В каждой из комнат размещены экспонаты. Оказалось, что на любом пути из левого нижнего угла в правый верхний угол, проходящем ровно по семи комнатам (включая начальную и конечную, см. рисунок), суммарное число экспонатов в этих семи комнатах одно и то же, и равно K .



Аналогично, на любом пути из правого нижнего угла в левый верхний угол, проходящем ровно по семи комнатам (включая начальную и конечную), суммарное число экспонатов в этих семи комнатах одно и то же, и равно L . K может быть не равно L . Может ли в музее быть ровно 1500 экспонатов?

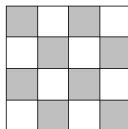
Ответ. Нет, не может.

Решение. Ключевое соображение в этой задаче состоит в следующем. Если взять 4 комнаты, образующие квадратик 2×2 , то количества экспонатов в A и D равны, и количества экспонатов в B и C равны.

A	B
C	D

Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. В самом деле, мы можем пройти из левого верхнего угла в правый нижний угол, проходя через A . Тогда из A можно пройти в D по путям $A - B - D$ и $A - C - D$. Тогда из условия получаем, что в B и C поровну экспонатов.

Из доказанного вытекает, что во всех чёрных клетках (см. рисунок) поровну экспонатов (по x), и во всех белых клетках поровну экспонатов (по y).



Тогда общее количество экспонатов равно $8x + 8y$. Это число делится на 8, и поэтому не может равняться не делящемуся на 8 числу 1500.

6-6. В каждой клеточке квадрата 5×5 Коля нарисовал стрелку: вниз, вверх, вправо или влево. Докажите, что можно стереть 20 стрелок так, чтобы никакие две из оставшихся стрелок не указывали бы на одну и ту же клеточку.

Стрелка указывает на клеточку, даже если между стрелкой и клеточкой есть другие стрелки.

Решение. Возможны два случая:

1) В каждой строке есть горизонтальная стрелка. Тогда выберем по одной горизонтальной стрелке в строке, остальные сотрём.

2) Есть горизонтальная строка, в которой только вертикальные стрелки. Выберем их, остальные сотрём.

Очевидно, что в каждом из двух случаев никакие две из оставшихся стрелок не могут указывать на одну и ту же клетку.

7 класс (продолжительность — 3 часа 55 минут)

7-1. Произведение пяти чисел отрицательно, а сумма любых трёх из них — положительна. Сколько может быть положительных среди этих пяти чисел?

Ответ. Четыре.

Решение. Так как произведение пяти чисел отрицательно, среди них нечётное число отрицательных. При этом трёх или больше отрицательных чисел быть не может, потому что тогда нашлись бы три числа с отрицательной суммой. Значит, отрицательное число только одно.

7-2. У Коли имеется несколько камней, каждый весит не обязательно целое количество грамм. Оказалось, что их можно разложить как на 10 кучек по 150 грамм каждая, так и на 15 кучек по 100 грамм каждая. Чему равно наименьшее возможное количество камней? Кучка может состоять в том числе и из одного камня.

Ответ. 20.

Решение. Оценка. Заметим, что все камни весят не более 100 грамм (так как они укладываются в кучки по 100 грамм), поэтому если их раскладывать на кучки по 150 грамм, то в каждой будет не менее двух камней. Всего получается не менее 20 камней.

Пример. Приведем пример, что 20 камней действительно могло быть. Пусть было 10 камней по 100 грамм, и 10 камней по 50 грамм. Очевидно, что эти камни раскладываются двумя требуемыми способами.

Критерии. Только пример: 2 балла.

Замечено, что вес каждого камня не более 100: 1 балл за оценку.

Если в примере верно указаны веса гирь, но не написано, как их раскладывать по кучкам: 1 балл за пример.

7-3. В ряд растут 20 деревьев. На первом дереве 1 ворона, на втором 2 вороны, на третьем три вороны, ..., на двадцатом дереве 20 ворон. Каждую минуту улетаели две вороны, причём с соседних деревьев. Какое наибольшее количество ворон могло улететь?

Ответ. 200.

Решение. Покрасим деревья в два цвета: чёрное, белое, чёрное, белое и т.д. Заметим, что каждый раз улетаело по одной вороне с чёрного дерева и по одной с белого. Но на чёрных деревьях $1 + 3 + 5 + \dots + 19 = 100$ ворон. Поэтому с них улетело не более 100 ворон, а с белых — столько же. То есть всего улетело не более 200 ворон.

Осталось привести пример, что 200 ворон действительно могли улететь. Для этого с 1 и 2 дерева пусть улетят по 1 вороне, с третьего и четвёртого дерева по 3 вороны, с пятого и шестого дерева по пять ворон и т.д. В сумме как раз улетит 200 ворон.

Критерии. Только пример: 2 балла.

Только оценка: 5 баллов.

7-4. Петя задумал такие 100 натуральных чисел, что их НОК **не** является квадратом. Затем он выписал на доску 100 чисел: НОК всех задуманных чисел без первого, НОК всех задуманных чисел без второго, ..., НОК всех задуманных чисел без сотого. Какое наибольшее количество точных квадратов могло оказаться среди выписанных на доске чисел?

Ответ. 1.

Решение. Пусть задуманы числа k_1, \dots, k_{100} и $N = \text{НОК}(k_1, \dots, k_{100})$. Так как N не является квадратом, то некоторое простое число p входит в разложение числа N на простые множители в нечётной степени: $N = p^s \cdot M$, где s — нечётно и M не делится на p . Заметим, что тогда в разложение на простые множители хотя бы одного числа k_i число p входит в степени s , а во все остальные числа

— в степени не больше s . Поэтому если k_i есть среди невычеркнутых чисел (а это так в 99 случаях), то НОК не будет точным квадратом. Значит, квадратов не более 1.

Если выписать числа $2, 1, 1, 1, \dots, 1$, то среди выписанных НОКов будет число 1 — точный квадрат.

Критерии. Только пример: 1 балл.

Только оценка: 6 баллов.

7-5. В треугольнике ABC проведена медиана AD . Известно, что $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$. Найдите величину угла BAD .

Ответ. 30° .

Решение. Пусть E — основание высоты из точки B на прямую AC . Тогда, пользуясь тем, что треугольник BEC — прямоугольный с углом 30° , получаем, что $BE = BD = DC = DE$; $\angle EDB = 60^\circ$. Далее,

$$\angle EDA = \angle EDB - \angle ADB = 15^\circ = \angle ADB - \angle ACB = \angle EAD,$$

откуда $EA = ED = EB$. Значит, треугольник AEB — равнобедренный прямоугольный, $\angle EAB = 45^\circ$, а $\angle BAD = \angle EAB - \angle EAD = 30^\circ$.

7-6. По кругу стоят 80 корзин, по которым как-то разложены 333 ореха; пустые корзины могут быть. Белочка и Ворона играют в игру, первой ходит Белочка. Белочка может своим ходом взять все орехи из семи любых подряд идущих корзин. Ворона может своим ходом взять все орехи из одной корзины, но эта корзина должна быть рядом с той, из которой Белочка брала орехи на предыдущем ходу (и при этом из неё Белочка на предыдущем ходу орехи не брала). Докажите, что Белочка сможет забрать себе не менее 290 орехов.

Белочка и Ворона видят распределение орехов по корзинам.

Решение. Пусть Белочка покрасит корзины в 8 цветов: первый, второй, ..., восьмой. Тогда в одном из цветов в сумме лежит не более 41 ореха (если в каждом цвете не менее чем по 42 ореха, то всего будет не менее $42 \cdot 8 = 336$ орехов). Без ограничения общности, пусть это восьмой цвет. Тогда всеми своими ходами Белочка будет брать орехи из подряд идущих корзин первого, второго, ..., седьмого цветов, а тогда Ворона вынуждена будет брать орехи только из корзин восьмого цвета, что не мешает Белочке делать в дальнейшем ходы по своей стратегии. Тем самым Ворона заберет себе не более 41 ореха, а все остальные орехи — их не менее $333 - 41 = 292$ — заберет себе Белочка.

8 класс (продолжительность — 3 часа 55 минут)

8-1. Произведение пяти чисел отрицательно, а сумма любых трёх из них — положительна. Сколько может быть положительных среди этих пяти чисел?

Ответ. Четыре.

Решение. Так как произведение пяти чисел отрицательно, среди них нечётное число отрицательных. При этом трёх или больше отрицательных чисел быть не может, потому что тогда нашлись бы три числа с отрицательной суммой. Значит, отрицательное число только одно.

8-2. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, а точки E и F — основания высот треугольника ABM , опущенных из вершин A и B соответственно. Докажите, что $DE = CF$.

Решение. Обозначим за T точку пересечения прямых AM и BC . Из того, что $CM = MD$, $\angle AMD = \angle CMT$ и $\angle ADM = \angle TCM$ следует, что треугольники AMD и TMC равны. Значит, $CT = AD = BC$, т.е. FC — медиана в прямоугольном треугольнике BFT и $CF = BC = AD$. Аналогично $ED = AD = BC$, откуда и следует утверждение задачи.

8-3. Петя задумал такие 100 натуральных чисел, что их НОК **не** является квадратом. Затем он выписал на доску 100 чисел: НОК всех задуманных чисел без первого, НОК всех задуманных чисел без второго, ..., НОК всех задуманных чисел без сотого. Какое наибольшее количество точных квадратов могло оказаться среди выписанных на доске чисел?

Ответ. 1.

Решение. Пусть задуманы числа k_1, \dots, k_{100} и $N = \text{НОК}(k_1, \dots, k_{100})$. Так как N не является квадратом, то некоторое простое число p входит в разложение числа N на простые множители в нечётной степени: $N = p^s \cdot M$, где s — нечётно и M не делится на p . Заметим, что тогда в разложение на простые множители хотя бы одного числа k_i число p входит в степени s , а во все остальные числа — в степени не больше s . Поэтому если k_i есть среди невычеркнутых чисел (а это так в 99 случаях), то НОК не будет точным квадратом. Значит, квадратов не более 1.

Если выписать числа $2, 1, 1, 1, \dots, 1$, то среди выписанных НОКов будет число 1 — точный квадрат.

Критерии. Только пример: 1 балл.

Только оценка: 6 баллов.

8-4. Две бабушки торговали на рынке кабачками, у каждой было по 20 кабачков. Начальная цена кабачка была 50 рублей. Так как особым спросом кабачки не пользовались, то если у какой-то бабушки покупали кабачок, то вторая сразу же снижала цену на 1 рубль (кабачки продаются только по одному, и такого, чтобы кабачки продавались одновременно, не было; покупатель не обязательно покупает самый дешевый кабачок). Сколько денег могут выручить бабушки в сумме, когда распродадут все кабачки? Укажите все возможные варианты.

Ответ. 1600 руб.

Решение. Если бы цена кабачков не менялась, то выручка составила бы 2000 руб. Рассмотрим пару: кабачок первой бабушки — кабачок второй бабушки. При продаже одного из этих кабачков, цена другого уменьшается на 1 рубль, т.е. этот рубль вычитается из возможной прибыли. Всего вышеуказанных пар $20 \cdot 20 = 400$. Значит, именно на такую сумму уменьшится предполагаемая прибыль.

Критерии. Ответ получен из рассмотрения частного случая порядка покупки кабачков: 1 балл.

8-5. Дима нашёл на чердаке сломанные весы. Они при взвешивании любого предмета случайно показывают вес либо на A граммов, либо на B граммов больше истинного, при этом $A \neq B$. Дима знает об этой особенности весов, но числа A и B ему неизвестны. У Димы есть 10 одинаковых камней. Как ему узнать, сколько весит один камень?

Решение. Взвесим один, два, ..., шесть камней. Получим результаты s_1, \dots, s_6 . При этом каждое s_n равно либо $nX + A$ (назовем такие s_n белыми), либо $nX + B$ (назовем такие s_n чёрными), где X — искомый вес камня. Пусть Дима посчитает 15 чисел $s_{n,m} = (s_n - s_m)/(n - m)$, где $1 \leq m < n \leq 6$. Для одноцветных s_n и s_m получаем, что $s_{n,m} = X$, для разноцветных s_n и s_m число $s_{n,m}$ равно $X + (B - A)/(n - m)$ или $X + (A - B)/(n - m)$.

Перебором нетрудно показать, что пар одноцветных s_n и s_m всегда не меньше шести, поэтому среди 15 чисел $s_{n,m}$ есть по крайней мере 6 одинаковых. Заметим, что все числа $(B - A)/5, \dots, (B - A)/1, (A - B)/1, \dots, (A - B)/5$ различны, а встречаться среди $s_{n,m}$ каждое из чисел $X + (B - A)/k$ и $X + (A - B)/k$ может не более $6 - k$ раз, в частности, не более 5 раз.

Поэтому вес камня — это то единственное число, которое не менее 6 раз встречается среди $s_{n,m}$.

Как видим, достаточно шести камней, а не десяти. Не исключено, что можно обойтись и меньшим количеством камней.

8-6. Пусть n и k — положительные целые числа, $k \leq n$. На острове живет n людей, каждый или всегда говорит правду, или всегда лжет. Жители знают друг про друга кто есть кто. Жителю острова можно задавать только вопросы вида: «Чётно ли количество лжецов в такой-то группе из k человек?», житель ответит «Да» или «Нет».

а) При каких значениях n и k можно определить про всех, кто всегда говорит правду, а кто всегда лжет?

б) В тех случаях, когда это можно определить, каково минимальное число вопросов для этого? Ответ может зависеть от n и k .

Ответ. Можно определить только при чётных k , в этом случае минимальное количество вопросов равно n .

Решение. 1) Почему нельзя узнать при нечётных k ? Возьмём произвольное распределение типов рыцарь/лжец по жителям. Сменим у каждого его тип. Заметим, что при этом ответы на все вопросы не изменятся. Тем самым эти две ситуации неразличимы, то есть вообще ни про одного человека нельзя определить, кто он.

2) Как при чётных k узнать про каждого, кто он? Выберем любое множество A из k жителей и каждого жителя этого множества спросим про само это множество. Покажем, что по ответам про каждого жителя из A можно понять, кто есть кто.

В самом деле, пусть ответов «Да» будет x , ответов «Нет» будет y . Тогда $x + y = k$, откуда числа x и y одинаковой чётности. Если они оба чётные, то все, кто ответил «Да» — честные, а все, кто ответил «Нет» — лжецы. Если же они оба нечётные, то все, кто ответил «Да» — лжецы, а все, кто ответил «Нет» — честные.

Итак, мы узнали про всех жителей из множества A , кто есть кто, за k вопросов. Зная это, зададим каждому из оставшихся $n - k$ жителей вопрос про A , и по его ответу поймем, кто он. Итого, всего понадобилось $k + (n - k) = n$ вопросов.

3) Почему количество вопросов не менее n ? На каждый вопрос 2 варианта ответа, и если вопросов m , то всего будет 2^m веток в опросе жителей. То есть всего будет 2^m ситуаций, в которых нужно давать ответы, кто есть кто. Эти ситуации должны различить 2^n вариантов — кто рыцарь, кто лжец, откуда $2^m \geq 2^n$, то есть $m \geq n$.